

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

---

Факультет «Информатика и системы управления»  
Кафедра «Приборы и системы ориентации,  
стабилизации и навигации»

**Н.Н. Фащевский**

**СИНТЕЗ НЕОБХОДИМЫХ  
СТРУКТУР АВТОМАТОВ  
УСТОЙЧИВОСТИ И  
УПРАВЛЯЕМОСТИ  
ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА.  
Часть 1.**

Электронное учебное издание

Методические указания к лабораторному практикуму по дисциплине  
«Расчет и синтез автопилотов»

Москва

© 2012 МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

*Рецензент:* доц., к.т.н., Наталья Михайловна Задорожная

**Фащевский Н.Н.**

Синтез необходимых структур автоматов устойчивости и управляемости летательного аппарата. Часть 1. Электронное учебное издание. - М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2012. 24 с.

Данный лабораторный практикум входит в программу профессионального цикла учебного плана «Расчет и синтез автопилотов». Он необходим для приобретения студентами практических навыков для проектирования бортовых систем автоматизированного управления для летательных аппаратов различного назначения. Работа начинается с получения математической модели движения самолета и последующей ее линеаризации. После этого проводится анализ устойчивости и управляемости летательного аппарата при ручном пилотировании. Работа выполняется на компьютере с использованием математических пакетов.

Предназначено для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана специальности 161101, прежде всего специализации «Автоматы стабилизации систем управления летательных аппаратов». Помимо помощи при выполнении лабораторного практикума могут использоваться для выполнения курсового и дипломного проектирования.

*Рекомендовано НМС факультета ИУ МГТУ им. Н.Э. Баумана*

*Электронное учебное издание*

**Фащевский Николай Николаевич**  
**СИНТЕЗ НЕОБХОДИМЫХ СТРУКТУР АВТОМАТОВ**  
**УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ**  
**ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА.**  
**Часть 1.**

© 2012 МГТУ имени Н.Э. Баумана

[Оглавление](#)

## Оглавление

1. ЗАДАНИЕ .....	4
2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ .....	5
3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ.....	15
4. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ.....	16
5. ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ .....	21
6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА.....	22
7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....	23
8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	24

## Оглавление

## 1. ЗАДАНИЕ

Цель работы - приобретение практических навыков для расчета и синтеза бортовых систем автоматизированной стабилизации углового положения для летательных аппаратов (ЛА).

Учебные задания на первый цикл лабораторных работ:

1. *Создание модели движения ЛА.* Работа посвящена созданию линейной модели движения ЛА. В теоретической части представлены: полная исходная система уравнений, описывающих движение ЛА и общий принцип варьирования переменных и метод малых возмущений. В практической части на примере одного из уравнений, описывающих движение ЛА, необходимо провести варьирование переменных относительно опорного режима движения ЛА, и с использованием метода малых возмущений сделать последующую линеаризацию этих уравнений.
2. *Анализ устойчивости продольного движения ЛА.* Работа посвящена расчету устойчивости и управляемости движения ЛА. В теоретической части представлены: типовые методики анализа модели движения ЛА. В практической части на основании коэффициентов линейной модели для одного режима полета оценить возможность разделения полного движения на коротко- и длиннопериодическое, рассчитать аналитическим методом параметры, характеризующие устойчивость продольного ЛА.
3. *Анализ устойчивости бокового движения ЛА.* Работа посвящена расчету устойчивости и управляемости движения ЛА. В теоретической части представлены: типовые методики анализа модели движения ЛА. В практической части на основании коэффициентов линейной модели для одного режима полета оценить возможность разделения полного движения на быстрое креновое движение и движение рысканья-скольжения, рассчитать аналитическим методом параметры характеризующие устойчивость бокового движения ЛА.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основой синтеза структуры автомата стабилизации (АС) летательного аппарата (ЛА) является математическая модель движения ЛА, отражающая реальные свойства ЛА и служащая на ранней стадии проектирования систем автоматики непосредственным объектом исследования.

Наиболее **полная математическая модель движения ЛА**, как объекта управления, представляется в форме системы нелинейных дифференциальных уравнений, **опи- сывающей его пространственное движение:**

$$\begin{aligned}
 I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z - I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z) &= M_{R_x}; \\
 I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x - I_{xy}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) &= M_{R_y}; \\
 I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) &= M_{R_z} - Py_p \cos \varphi_p; \\
 m(\dot{V}_x + \omega_y V_z - \omega_z V_y) &= P \cos \varphi_p - X \cos \alpha + Y \sin \alpha - G \sin \vartheta; \\
 m(\dot{V}_y + \omega_z V_x - \omega_x V_z) &= P \sin \varphi_p + X \sin \alpha + Y \cos \alpha - G \cos \vartheta \cos \gamma; \\
 m(\dot{V}_z + \omega_x V_y - \omega_y V_x) &= Z + G \cos \vartheta \sin \gamma; \\
 \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\gamma}; \\
 \omega_y &= \dot{\varphi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma; \\
 \omega_z &= -\dot{\varphi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma; \\
 \dot{x}_c &= V_x \cos x^{\wedge} x_g + V_y \cos y^{\wedge} x_g + V_z \cos z^{\wedge} x_g; \\
 \dot{y}_c &= V_x \cos x^{\wedge} y_g + V_y \cos y^{\wedge} y_g + V_z \cos z^{\wedge} y_g; \\
 \dot{z}_c &= V_x \cos x^{\wedge} z_g + V_y \cos y^{\wedge} z_g + V_z \cos z^{\wedge} z_g;
 \end{aligned}$$

Притом, что силы и моменты являются функциями ряда параметров полета:

$$\begin{aligned}
 M_{R_x} &= M(m_x(\beta, \chi, \delta_{\vartheta}, \delta_n, \omega_x, \omega_y, M)\bar{V}, H); \\
 M_{R_y} &= M(m_y(\beta, \chi, \delta_{\vartheta}, \delta_n, \omega_x, \omega_y, M)V, H); \\
 M_{R_z} &= M(m_z(c_y, \varphi, \delta_{\vartheta}, \delta_{zak}, \omega_z, \dot{\alpha}, M)V, H); \\
 X &= X(c_x(c_y, \chi, M, \delta_{zak}, \varphi, \delta_{\vartheta})V, H); \\
 Y &= Y(c_y(\alpha, \chi, M, \delta_{zak}, \varphi, \delta_{\vartheta})V, H); \\
 Z &= Z(c_z(\beta, \delta_n)V, H); \\
 P &= P(\delta_{c.z}, n, V, H, t^{\circ}C).
 \end{aligned}$$

Эта система даже при рассмотрении ЛА, как твердого тела неизменной формы, является сложной системой, правые части которой представляют собой функции многих переменных. **Единственный метод решения таких систем уравнений - численное**

### Оглавление

интегрирование с использованием компьютера. Поэтому производить синтез структур АС на основе выше приведенных уравнений весьма сложно.

Простейшая математическая модель движения ЛА - это линейная модель, т.е. система линейных дифференциальных уравнений. Широкое использование линейной модели при синтезе структуры АС объясняется рядом причин:

- формы большинства ЛА таковы, что на основных рабочих режимах полета имеют место линейные зависимости сил и моментов от кинематических параметров;
- при правильно спроектированной системе величина ошибки в принципе не может быть большой;
- по первой теореме Ляпунова вопрос об устойчивости нелинейной системы может быть решён на основе линейной аппроксимации.

Это позволяет вместо уравнений движения самолета воспользоваться их первым приближением: уравнениями для малых отклонений относительно некоторого опорного (заданного) режима полета (программы полета).

При движении на ЛА, кроме основных сил и моментов, учитываемых в опорном (невозмущенном) движении, всегда действуют дополнительные возмущающие силы и моменты, обусловленные различными возмущающими факторами, связанными с внешней средой и с самим самолетом. Возмущенное движение будет отличаться от опорного отклонениями (вариациями) кинематических параметров движения:  $\Delta V$ ,  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta \omega_x$  и т.д.

Вообще линеаризацию дифференциальных уравнений движения ЛА производят при помощи формулы Тейлора. Используя последнюю, можно разложить нелинейную функцию нескольких переменных  $F(x, y, \dots)$  по степеням малых приращений, которые берутся в окрестности их значений, соответствующих установившемуся режиму полета:  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $y = y_0 + \Delta y$ , ... . Таким образом, эта функция примет вид:

$$F(x, y, \dots) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \dots) = F(x_0, y_0, \dots) + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \dots + \sum_{i=1}^n [(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \dots)^i / i!] + R_{n+1}.$$

При линеаризации ограничиваются лишь линейными членами и тогда приращение функции принимает вид:

$$\Delta F(x, y, \dots) = F(x, y, \dots) - F(x_0, y_0, \dots) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \dots$$

Применяя эту методику к уравнениям полной математической модели движения ЛА, можно получить линейные уравнения в вариациях. Если за опорный (заданный) режим полета принят прямолинейный горизонтальный полет, допустимо исследо-

вать изолированно друг от друга продольное и боковое движение самолета. А с учетом сокращений в виде коэффициентов линейной модели  $a_i, b_i, c_i, e_i$  получаются две системы дифференциальных уравнений в форме Коши (знак вариации  $\Delta$  убран, за исключением скорости  $V$  и высоты полета  $H$ , т.к. речь не может идти об их абсолютных значениях):

- для модели продольного движения самолета:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_z = -c_1\omega_z - c_5\dot{\alpha} - c_2\alpha - e_3\Delta V - c_3\delta_e \\ \dot{\alpha} = \omega_z - c_4\alpha - e_2\Delta V - c_9\delta_e \\ \Delta\dot{V} = -c_8\alpha - e_1\Delta V - c_7\mathcal{G} \\ \Delta\dot{H} = -c_6\alpha + c_{11}\Delta V + c_6\mathcal{G} \\ \dot{\mathcal{G}} = \omega_z \end{cases}$$

- для модели бокового движения самолета:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = -b_1\omega_x - a_6\omega_y - b_2\beta - a_5\delta_n - b_3\delta_\gamma \\ \dot{\omega}_y = -b_6\omega_x - a_1\omega_y - a_2\beta - a_3\delta_n - b_5\delta_\gamma \\ \dot{\beta} = b_7\omega_x + a_8\omega_y - a_4\beta + b_4\gamma - a_7\delta_n \\ \dot{\gamma} = \omega_x - a_9\omega_y + b_8\gamma \\ \dot{\phi} = a_{10}\omega_y - b_9\gamma \end{cases}$$

Эта линейная нестационарная модель движения ЛА справедлива для вариаций параметров движения ЛА около некоторой опорного (заданного) режима полета. Практика расчетов АС различного назначения показала, что даже для высокоманевренных ЛА допустимо полетную область рабочих режимов самолета по числу  $M$  (скорости) и высоте полета разбить на ряд элементарных подобластей с шагом  $\Delta M$  и  $\Delta H$ , вершины которых образуют расчетные режимы полета стационарного объекта управления, как показано на рисунке 1.

Таким образом, нестационарную математическую модель движения ЛА заменяют  $n$  количеством стационарных моделей движения, т.е. разработчики системы стабилизации ЛА как бы имеют дело с  $n$  параметрически различными моделями самолета. Каждой модели соответствует свой набор коэффициентов линейной модели  $a_i, b_i, c_i, e_i$ . В ряде случаев линейные стационарные модели движения самолета допускают и дальнейшие упрощения.

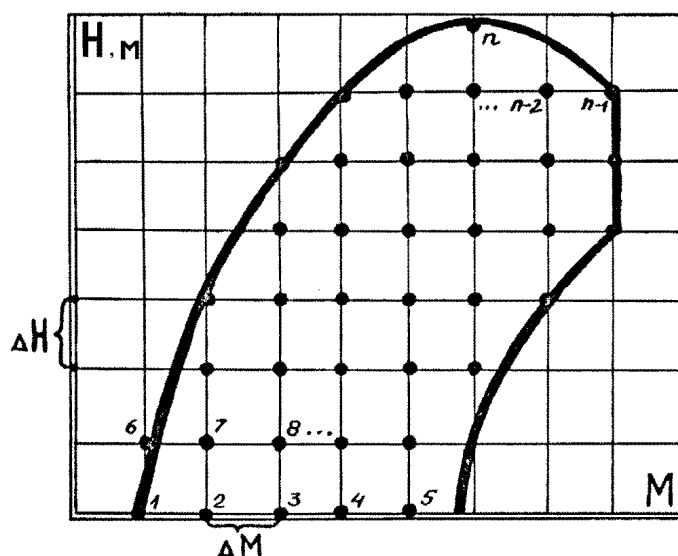


Рисунок 1 - Полетная область рабочих режимов самолета.

Безопасный полет самолета, выдерживание заданного опорного режима полета возможно, если самолет обладает удовлетворительными летными характеристиками. **Летные характеристики** - есть совокупность характеристик ЛА, определяющих его летно-тактические свойства. Они **состоят из трех основных взаимосвязанных групп: характеристики маневренности, устойчивости и управляемости**. Под **устойчивостью** движения "свободного" ЛА понимается его способность сохранять исходный режим полета по окончании действия внешних возмущений. Под "**свободным**" ЛА понимается ЛА, у которого рули закреплены и не управляются.

**Анализ линейной модели ЛА для свободного самолета ( $\delta_V = 0, \delta_\Theta = 0, \delta_H = 0$ ) может быть проведен с использованием алгебраических методов Рауса и Гурвица из теории автоматического регулирования.** Это также дает первичное представление о необходимой степени автоматизации процесса ручного пилотирования. **Для этого обычно раздельно рассматриваются системы дифференциальных уравнений для продольного и бокового движения самолета.**

**Устойчивость продольного возмущенного движения свободного ЛА.** Уравнения продольного движения свободного самолета в операторной форме Лапласа-Карсона принимают вид:

$(p^2 + c_1 p) + (c_5 p + c_2) + e_3 \Delta V = 0$  - уравнение моментов относительно поперечной плоскости;

$-p + (p + c_4) + e_2 \Delta V = 0$  - уравнение нормальных сил;

$c_7 - c_8 + (p + e_1) \Delta V = 0$  - уравнение касательных сил.

### [Оглавление](#)



Характеристическое уравнение системы получается следующим образом:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} (p^2 + c_1) & (c_5 p + c_2) & e_3 \\ -p & p + c_4 & e_2 \\ c_7 & c_8 & (p + e_1) \end{vmatrix} = p^4 + A_1 \cdot p^3 + A_2 \cdot p^2 + A_3 \cdot p + A_4 = 0,$$

где  $A_i$  - сокращения -

$$A_1 = c_1 + c_4 + c_5 + e_1,$$

$$A_2 = e_1(c_1 + c_4 + c_5) + c_2 + c_1 + c_4 - c_5 e_2,$$

$$A_3 = e_1(c_1 c_4 + c_2) + e_2(c_1 c_8 - c_5 c_7) - e_3(c_7 + c_8),$$

$$A_4 = c_7(c_2 e_2 - c_4 e_3).$$

Для того, чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части. Исследование системы четвертого порядка затруднительно. Практика эксплуатации ЛА показала, что в первые секунды возмущенного движения ЛА нарушается равновесие моментов, действующих на ЛА вокруг поперечной оси, и как следствие этого происходит сильное вращение ЛА вокруг этой же поперечной оси, при этом угол атаки может изменяться в несколько раз. Однако, если движение устойчиво (большие корни), то изменение угла атаки и вращения ЛА вследствие нарушения баланса моментов заканчивается достаточно быстро за (1—5) с. Поэтому, из-за большой инерционности объекта в течение этого короткого промежутка времени, скорость движения ЛА существенным образом измениться не успевают.

В дальнейшем, развитие возмущенного движения, равновесие моментов не нарушается, и движение происходит только за счет нарушения равновесия нормальных, и особенно, касательных сил (большие корни - короткопериодическое движение). В первый момент возмущение по  $\Delta V = 0$ , уравнение изолированного короткопериодического движения (КПД):

$$(p + c_1) \omega_z + (c_5 p + c_2) = 0;$$

$$-\omega_z + (p + c_4) = 0;$$

$$\omega_z - \vartheta p = 0 \text{ (третье уравнение вырождается в условие } \alpha_{гп} = \vartheta_{гп}, \text{ при } \Theta_{гп} = 0).$$

Характеристическое уравнение КПД системы имеет вид:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} (p + c_1) & (c_5 p + c_2) \\ -1 & (p + c_4) \end{vmatrix} = p^2 + (c_1 + c_4 + c_5) p + (c_1 c_4 + c_2) = 0.$$

Система второго порядка имеет два корня - либо два действительных, либо два комплексно-сопряженных:

$$p_{1,2} = -(c_1 + c_4 + c_5)/2 \pm \sqrt{[(c_1 + c_4 + c_5)^2/4 - (c_1 c_4 + c_2)]}.$$

1) если  $p_{1,2}$  - комплексные корни, тогда  $(c_1 c_4 + c_2) > 0$  и  $(c_1 + c_4 + c_5)^2/4 > (c_1 c_4 + c_2)$ .

Чтобы действительная часть корней была отрицательной ( $Re(p_{1,2}) < 0$ ), необходимо выполнение условия:  $(c_1 + c_4 + c_5) > 0$  и соответственно требуется оценить знаки (signum) значений коэффициентов  $c_i$ .

$c_1 = -\partial m_z / \partial \omega_z / J_{zz} \rho S V / 2 b_A^2$ ,  $c_1 > 0$ , если коэффициент демпфирующего момента по угловой скорости  $\partial m_z / \partial \omega_z < 0$ , что так обычно и бывает, где  $b_A$  - средняя аэродинамическая хорда.

$c_4 = (c_y^\alpha - c_x) / m \rho S V / 2$ ,  $c_x$  - относительно мало, при  $\alpha < \alpha_{кр}$ ,  $c_y > 0$ , то  $c_4 > 0$ .

$c_5 = -m_z^{\alpha'} / J_{zz} b_A^2 \cdot S \cdot V / 2$ ,  $c_5 > 0$ , если коэффициент дополнительного демпфирования за счет запаздывания схода потока у горизонтального оперения  $m_z^{\alpha'} < 0$ , что так обычно и бывает.

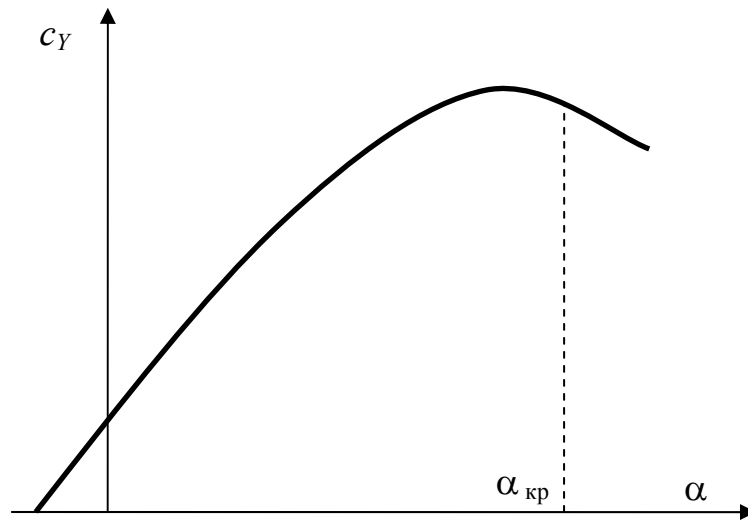


Рисунок 2 – Качественное представление связи коэффициента подъемной силы и угла атаки

Т.е., можно утверждать, что при ( $\alpha < \alpha_{кр}$ ) если КПД имеет колебательный характер, то такое движение устойчиво.

2) если корни  $p_{1,2}$  - вещественные корни, т.е. обязательно  $(c_1 + c_4 + c_5)^2/4 > (c_1 c_4 + c_2)$ .

Условие  $c_1 c_4 < c_2$  при  $c_2 > 0$  - всегда выполняется, а в случае  $c_2 < 0$ , получаем, что  $p_2 > 0$ , а  $p_1 < 0$  - сопряженные корни, следовательно, КПД неустойчиво, т.к.  $p_2$  располагается в правой полуплоскости комплексной плоскости.

$c_2 = -m_z^\alpha / J_{zz} b_A^2 S \cdot V / 2$ , знак  $c_2$  зависит от  $m_z^\alpha$ , в свою очередь  $m_z^\alpha \sim -(x_F - x_T)$ , где:  $x_F$  - координата точки фокуса ЛА,  $x_T$  - координата центра тяжести ЛА. При  $x_F < x_T$  КПД становится неустойчивым, т.е. когда фокус располагается впереди

### [Оглавление](#)

центра тяжести. У устойчивого в КПД профиля фокус находится за центром тяжести. Если короткопериодическое движение устойчиво, то полет имеет аperiodический характер.

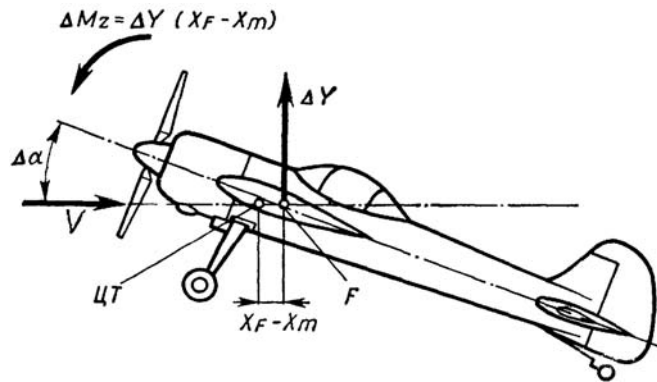


Рисунок 4 – Влияние положения точки фокуса на устойчивость в КПД

Неустойчивость в КПД ЛА вызывает сложности при ручном пилотировании в связи высокой частотой колебаний. В случае если такое встречается на некоторых режимах полета, в контур системы управления ЛА обычно вводится статический автомат продольного управления. Эта система самостоятельно при необходимости соуправляет (вместе с летчиком) рулем высоты в зависимости от динамики угловой скорости  $\omega_z$  и приращения нормальной перегрузки  $\Delta n_y$ .

При длиннопериодическом (фугоидном) движении (ДПД) изменяется скорость полета  $V$  и угол тангажа  $\vartheta$  (с периодом от 60 до 100 секунд и более), угол атаки  $\alpha$  почти *const* и на него не влияют малые корни характеристического уравнения. Модель в этом случае выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} c_2 \alpha + e_3 \Delta V &= 0, \\ -p \vartheta + (p + c_4) + e_2 \Delta V &= 0, \\ c_7 \vartheta - c_8 \alpha + (p + e_1) \Delta V &= 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение системы ДПД имеет вид:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 0 & c_2 & e_3 \\ -p & p + c_4 & e_2 \\ c_7 & c_8 & (p + e_1) \end{vmatrix} = p^2 + d_1 p + d_2 = 0, \quad p_{1,2} = -d_1/2 \pm \sqrt{[d_1^2/4 - d_2^2]}.$$

Необходимо и достаточно для обеспечения устойчивости, чтобы  $d_1 > 0$  и  $d_2 > 0$ .

Коэффициент  $d_1 = e_1 - c_7 e_3/c_2 - c_8 e_3/c_2 \cong e_1 = (X^F - P^V \cos(\alpha_{гп}))/m$ . В связи с тем, что  $c_7 e_3 \ll c_2$  и  $c_8 e_3 \ll c_2$ . Разность, стоящая в скобках может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от скорости полета. Здесь  $X^F$  - значение силы

#### [Оглавление](#)

лобового сопротивления при выполнении горизонтального полета (когда  $X = P$ , где  $P$  - требуемая тяга,  $P^V$  - располагаемая тяга).

Коэффициент  $d_2 = c_7 (c_2 e_2 - c_4 e_3) = \rho \cdot S [(c_y + c_{y^M} \cdot M/2) - m_z^M \cdot M / (2 \cdot m_z^{Cy})] \cdot g/m$ .  
 Знак  $d_2$  зависит от скорости. При  $M < M_{кр}$ ,  $d_2 > 0$ ;  $M = (0.8 - 1.2) \cdot M_{кр}$ ,  $d_2 < 0$ ;  $M > M_{кр}$ , по-разному и сильно зависит от параметров конкретного ЛА.

Вообще устойчивость длиннопериодического возмущенного движения рассматривают как устойчивость по скорости (она - определяющий ДПД параметр).

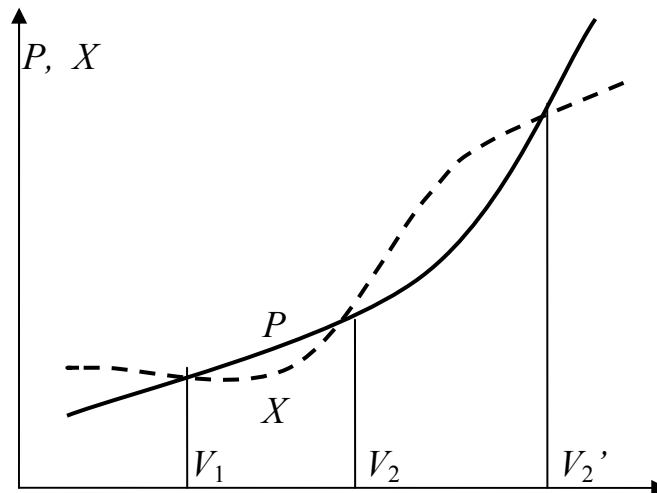


Рисунок 4 – Качественное представление связи кривых потребных и располагаемых тяг для самолета с ТРД

Устойчивость бокового движения свободного ЛА рассматривается при анализе системы уравнений бокового движения при условиях  $d\psi/dt = \omega_y$  и  $a_9 = b_8 = b_9 = 0, a_{10} = 1$ :

$$\begin{aligned} p(p + b_1) \gamma + a_6 \cdot \omega_y + b_2 \cdot \beta &= 0, \\ b_6 \cdot p \cdot \gamma + (p + a_1) \omega_y + a_2 \cdot \beta &= 0, \\ -\omega_y + (p + a_4) \beta - (b_7 \cdot p + b_4) \gamma &= 0, \\ \omega_x - p \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение системы с сокращениями в виде  $V_i$  имеет вид:

$$\Delta(p) = p^4 + V1 \cdot p^3 + V2 \cdot p^2 + V3 \cdot p + V4 = 0, \text{ при:}$$

$$V1 = a_1 + a_4 + b_1,$$

$$V2 = a_1 a_4 + a_2 + a_1 b_1 + b_1 a_4 + b_2 b_7 - a_6 b_6,$$

$$V3 = b_1 a_2 + b_1 a_1 a_4 + b_2 b_4 + b_2 \cdot (a_1 b_7 - b_6) - a_6 \cdot (a_4 b_6 + a_2 b_7),$$

$$V4 = b_4 \cdot (a_1 b_2 - a_2 a_6).$$

### [Оглавление](#)

Система имеет четыре корня - два действительных и два комплексно-сопряженных.

Первый действительный, так называемый «креновой» корень уравнения определяется из соотношения:

$$p_1 \cong -B1 = -b_1 = - [ -m_x^{\omega x} / J_{xx} \rho S V l^2 / 4 ] \text{ (при } b_1 \gg a_1 \text{ и } b_1 \gg a_4) .$$

Обычно коэффициент  $m_x^{\omega x} < 0$  при  $\alpha < \alpha_{кр}$  и таким образом  $b_1 > 0$ , а соответственно  $p_1 < 0$ . Это так называемый «креновой корень», определяющий креновую – углу  $\gamma$  составляющую бокового движения, обычно (при  $b_1 > 0$ ) это апериодический затухающий процесс.

Второй действительный корень уравнения определяется из отношения –  $p_2 \cong -B4/B3$ , обычно  $B3 > 0$ , т.о. знаки  $p_2$  и  $B4$  противоположны. Если  $B4 > 0$ , то  $p_2 < 0$ , движение устойчивое, чтобы  $p_2$  было отрицательно, надо  $(a_1 b_2 - a_2 a_6) > 0$ , которое после подстановки выражений для стоящих в нем коэффициентов приводится к виду:

$$(m_x^\beta / m_y^\beta) - (m_x^{\omega y} / m_y^{\omega x}) > 0 .$$

В случае  $p_2 > 0$ , то этот корень называется «спиральным», т.к. ему, соответствует медленное и непрерывное увеличение угла крена  $\gamma$  ЛА, сопровождающееся спиральным движением в пространстве с уменьшением высоты полета. Вообще оптимальные границы спирального корня:  $-0,0693 < p_2 < 0,0347$ .

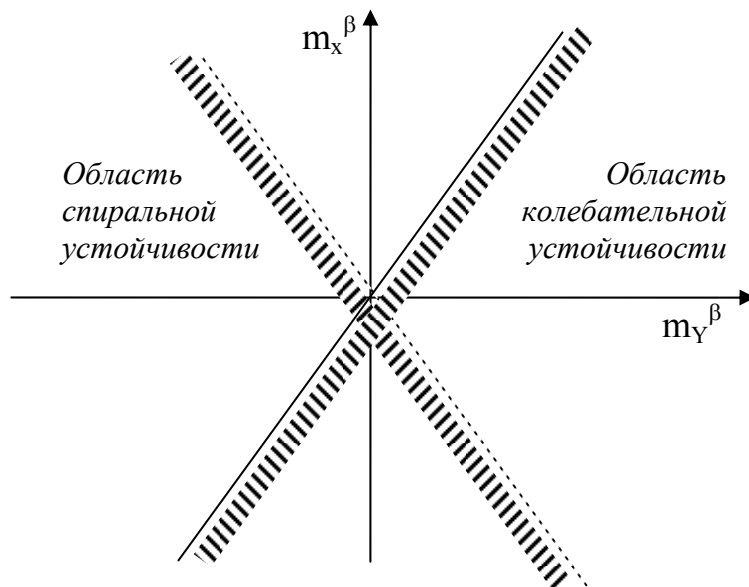


Рисунок 6 – Качественное представление о примерных границах боковой устойчивости

Если это выполняется, то коэффициентами  $a_6$  и  $b_6$  можно пренебречь и общую систему уравнений бокового движения разбить на две. Такое разделение позволяет уп-

ростить исследование бокового движения ЛА. Так же условием разделения является следующее неравенство:

$$b_1 (a_2 + a_1 a_4) / [(b_1 a_1 a_4 + b_1 a_2 + b_2 (a_1 b_7 - b_6) - a_6 (a_4 b_6 + a_2 b_7)) - b_2 b_4] > 0,9.$$

Первая система, характеризующая изменения угла скольжения и угловой скорости вокруг оси  $Y$ :

$$(p + a_1) \omega_y + a_2 \beta = 0,$$

$$-a_8 \omega_y + (p + a_4) \beta = 0.$$

Она весьма напоминает систему уравнений КПД продольного движения самолета, ее характеристическое уравнение имеет вид:  $p^2 + f_1 p + f_2 = 0$ ,

где  $f_1 = a_1 + a_4$  и  $f_2 = a_2 + a_1 a_4$ .

Выполнение условия устойчивости сводится к требованиям оценки коэффициентов  $f_1 > 0$  и  $f_2 > 0$ . Первый обычно таким и является, а второй, пропорционален, так называемому, коэффициенту запаса устойчивости по углу скольжения  $\sigma_\beta$ :  $f_2 \sim -\sigma_\beta$ , который в свою очередь  $\sigma_\beta \cong m_y^\beta$ . Для устойчивости необходимо, чтобы  $\sigma_\beta < 0$ .

Вторая система определяет изменения угловой скорости вокруг оси  $X$ , а в качестве возмущения выступает скольжение  $\beta$ :

$$(p + b_1) \omega_x = -b_2 \beta.$$

Эта система, по сути одно уравнение второго порядка - устойчивость определяется знаком  $b_1$ . Для устойчивости по крену необходимо, чтоб этот коэффициент был положительным, при том, что:  $b_1 \cong -m_x^{\omega x}$ . Интенсивность возмущающего воздействия по углу скольжения определяется знаком коэффициента  $b_2$ , который определяется:  $b_2 \cong -m_x^\beta$ .

### 3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ

Вариант задания соответствует номеру студента в журнале учебной группы.

В первом пункте задания каждому варианту соответствует одно из динамических уравнений движения летательного аппарата:

- 1 вариант - уравнение касательных сил,
- 2 вариант - уравнение нормальных сил,
- 3 вариант - уравнение боковых сил,
- 4 вариант - уравнение момента тангажа,
- 5 вариант - уравнение момента крена
- 6 вариант - уравнение момента рысканья,
- 7 вариант - уравнение касательных сил,
- 8 вариант - уравнение нормальных сил,
- 9 вариант - уравнение боковых сил,
- 10 вариант - уравнение момента тангажа,
- 11 вариант - уравнение момента крена,
- 12 вариант - уравнение момента рысканья.

Для выполнения 2 и 3 пунктов задания необходимы коэффициенты линейной модели летательного аппарата для одного фиксированного режима полета. Режим полета и соответствующие ему коэффициенты линейной модели летательного аппарата необходимо взять в пункте "Исходные данные" соответствии с вариантом, либо из курсового проекта.

## 4. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

### Коэффициенты линейной модели бокового движения

$$a_1 = -\frac{J_{XX}(-m_X^{\bar{\omega}_x} \operatorname{tg} \alpha + m_Y^{\bar{\omega}_y}) + J_{XY}(m_Y^{\bar{\omega}_y} \operatorname{tg} \alpha + m_X^{\bar{\omega}_x})}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} \cdot \frac{\rho V}{4} \cdot S \cdot l^2 \text{ [рад/с}^2\text{]};$$

$$a_2 = -\frac{J_{XX}(-m_X^{\beta} \operatorname{tg} \alpha + m_Y^{\beta}) + J_{XY}(m_Y^{\beta} \operatorname{tg} \alpha + m_X^{\beta})}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} \cdot \frac{\rho V^2}{4} \cdot S \cdot l \text{ [рад/с}^2\text{]};$$

$$a_3 = -\frac{J_{XX}(-m_X^{\delta_H} \operatorname{tg} \alpha + m_Y^{\delta_H}) + J_{XY}(m_Y^{\delta_H} \operatorname{tg} \alpha + m_X^{\delta_H})}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} \cdot \frac{\rho V^2}{4} \cdot S \cdot l \text{ [рад/с}^2\text{]};$$

$$a_4 = -\frac{c_Z^{\beta}}{m} \cdot \frac{\rho V}{2} \cdot S \text{ [рад/с]};$$

$$a_5 = a_3 \sin \alpha - \frac{J_{YY}(m_X^{\delta_H} \cos \alpha + m_Y^{\delta_H} \sin \alpha) + J_{XY}(m_X^{\delta_H} \cos \alpha + m_Y^{\delta_H} \sin \alpha)}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S \cdot l \text{ [рад/с}^2\text{]};$$

$$a_6 = a_1 \sin \alpha - \frac{J_{YY}(m_X^{\bar{\omega}_x} \cos \alpha + m_Y^{\bar{\omega}_y} \sin \alpha) + J_{XY}(m_Y^{\bar{\omega}_y} \cos \alpha - m_X^{\bar{\omega}_x} \sin \alpha)}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} \cdot \frac{\rho V}{4} \cdot S \cdot l^2 \text{ [рад/с]};$$

$$a_7 = -\frac{c_Z^{\delta_H}}{m} \cdot \frac{\rho V}{2} \cdot S \text{ [1/с]}; \quad a_8 = \cos \alpha; \quad a_9 = \operatorname{tg} \vartheta \cdot \cos \gamma; \quad a_{10} = \sec \alpha;$$

$$b_1 = b_6 \sin \alpha - \left\{ \frac{J_{YY}[m_X^{\bar{\omega}_x} \cos^2 \alpha + m_Y^{\bar{\omega}_y} \sin^2 \alpha + (m_Y^{\bar{\omega}_y} + m_X^{\bar{\omega}_x}) \cos \alpha \sin \alpha]}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} + \right. \\ \left. + \frac{J_{XY}[(m_Y^{\bar{\omega}_x} \cos^2 \alpha - m_X^{\bar{\omega}_y} \sin^2 \alpha) + (m_Y^{\bar{\omega}_y} - m_X^{\bar{\omega}_x}) \cos \alpha \sin \alpha]}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} \right\} \cdot \frac{\rho V}{4} \cdot S \cdot l^2 \text{ [1/с]};$$

$$b_2 = a_2 \sin \alpha - \left\{ \frac{J_{YY}(m_Y^{\beta} \cos \alpha + m_Y^{\beta} \sin \alpha)}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} + \frac{J_{XY}(m_Y^{\beta} \cos \alpha - m_X^{\beta} \sin \alpha)}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} \right\} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S \cdot l \text{ [1/с}^2\text{]};$$

$$b_3 = b_5 \sin \alpha - \left\{ \frac{J_{YY}(m_X^{\delta_3} \cos \alpha + m_Y^{\delta_3} \sin \alpha)}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} + \frac{J_{XY}(m_Y^{\delta_3} \cos \alpha - m_X^{\delta_3} \sin \alpha)}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} \right\} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S \cdot l \text{ [1/с}^2\text{]};$$

$$b_4 = \frac{g}{V} \cos \alpha \text{ [1/с]};$$

$$b_5 = -\left\{ \frac{J_{XX}(-m_X^{\delta_3} \operatorname{tg} \alpha + m_Y^{\delta_3})}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} + \frac{J_{XY}(m_Y^{\delta_3} \operatorname{tg} \alpha + m_X^{\delta_3})}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} \right\} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S \cdot l \text{ [1/с}^2\text{]};$$

$$b_6 = -\left\{ \frac{J_{XX}[(m_Y^{\bar{\omega}_y} - m_X^{\bar{\omega}_x}) \sin \alpha - m_Y^{\bar{\omega}_y} \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + m_Y^{\bar{\omega}_x} \cos \alpha]}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} + \right. \\ \left. + \frac{J_{XY}[(m_Y^{\bar{\omega}_y} \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha + m_X^{\bar{\omega}_x} \cos \alpha) + (m_X^{\bar{\omega}_y} + m_Y^{\bar{\omega}_x}) \sin \alpha]}{J_{XX}J_{YY} - J_{XY}^2} \right\} \cdot \frac{\rho V}{4} \cdot S \cdot l^2 \text{ [1/с}^2\text{]};$$

### [Оглавление](#)



$$b_7 = \sin\alpha ; \quad b_8 = \omega_z \cdot \operatorname{tg}\vartheta \text{ [рад/с]}; \quad b_9 = c_4 \cdot \Delta\alpha \text{ [град/с}^2\text{]}.$$

### Коэффициенты линейной модели продольного движения

$$c_1 = -\frac{m_z^{\omega_z}}{J_{zz}} \frac{\rho V}{2} S \cdot b_A^2 \text{ [1/с]};$$

$$c_2 = -\frac{m_z^\alpha}{J_{zz}} q \cdot S \cdot b_A \text{ [1/с}^2\text{]};$$

$$c_3 = -\frac{m_z^{\delta_B}}{J_{zz}} q \cdot S \cdot b_A \text{ [1/с}^2\text{]};$$

$$c_4 = \frac{c_Y^\alpha + c_X}{m} \frac{\rho V}{2} S \cdot b_A^2 \text{ [1/с}^2\text{]};$$

$$c_5 = -\frac{m_z^\alpha}{J_{zz}} \frac{\rho V}{2} S \cdot b_A^2 \text{ [1/с}^2\text{]};$$

$$c_6 = 0,01745 \cdot V \cdot \cos\theta_0 \text{ [м/град}\cdot\text{с]};$$

$$c_7 = 0,01745 \cdot g \cdot \cos\theta_0 \text{ [м/(град}\cdot\text{с}^2\text{)}];$$

$$c_8 = \frac{c_X^\alpha + c_Y}{57,3m} q \cdot S \text{ [м/(град}\cdot\text{с}^2\text{)}];$$

$$c_9 = \frac{c_Y^{\delta_B}}{m} \frac{\rho V}{2} S \text{ [1/с]};$$

$$c_{10} = \frac{g}{V} \sin\theta_0 \text{ [1/с]}; \quad c_{11} = \sin\theta_0 ;$$

$$e_1 = c_X \left( 1 + \frac{c_X^M M}{2c_X} - \frac{P^V}{\rho V S c_X} \right) \frac{\rho V}{m} S \text{ [1/с]};$$

$$e_2 = 57,3 c_Y \left( 1 + \frac{c_Y^M M}{2c_Y} \right) \frac{\rho}{m} S \text{ [град/м]};$$

$$e_3 = -\frac{57,3}{J_{zz}} \left[ \left( \frac{m_z^M}{a} + 2y_P \frac{c_X + c_{YI.II} \sin\theta_0}{57,3m} \right) q \cdot S \cdot b_A - P^V \cdot y_P \right] \text{ [град/(с}\cdot\text{м)]}.$$

Таблица коэффициентов бокового движения (рысканье)  $a_i$ 

№	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
1	0.635	5.470	2.720	0.269	3.260	0.709	0.043
	0.515	1.730	2.110	0.228	6.180	2.263	0.029
2	0.581	4.080	2.580	0.266	5.660	1.671	0.043
	0.653	5.74	2.270	0.296	3.620	0.907	0.034
3	0.354	2.750	1.510	0.153	1.490	0.525	0.0254
	0.283	0.425	1.020	0.119	3.330	1.308	0.0148
4	0.329	2.180	1.440	0.151	3.150	0.976	0.0254
	0.259	-0.877	0.633	0.096	2.310	1.325	0.008
5	0.177	13.400	5.460	0.300	7.040	0.706	0.447
	0.732	3.360	5.310	0.310	7.240	1.430	0.0447
6	1.640	40.00	7.56	0.620	7.360	0.985	0.0278
	0.370	1.850	2.730	0.160	5.990	1.024	0.0254
7	0.405	6.410	2.880	0.159	3.500	0.443	0.0254
	0.343	-1.390	2.670	0.156	6.600	1.352	0.0215
8	0.184	2.770	1.350	0.074	1.360	0.276	0.0121
	0.159	-0.633	1.260	0.072	3.140	0.629	0.0103
9	0.395	7.920	2.480	0.146	2.230	0.302	0.011
	0.383	4.850	2.480	0.162	1.840	0.502	0.0107
10	0.506	10.000	2.100	0.187	3.130	0.305	0.006
	0.491	0.934	2.09	0.207	1.410	0.576	0.006
11	0.150	2.030	0.813	0.060	0.820	0.148	0.003
	0.147	0.801	0.813	0.064	0.558	0.191	0.002
12	0.410	6.140	2.330	0.150	3.480	0.434	0.0245
	0.370	1.350	2.730	0.160	5.990	1.024	0.0254

[Оглавление](#)

Таблица коэффициентов бокового движения (крен)  $b_i$ 

№	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$
1	3.100	20.200	17.600	0.072	-0.518	0.057	0.065
	1.770	41.800	7.810	0.066	0.146	-0.092	0.391
2	1.900	38.600	13.100	0.070	-0.258	-0.094	0.259
	3.000	20.300	17.630	0.079	-0.500	0.0517	0.063
3	1.790	13.900	9.730	0.076	-0.313	0.004	0.126
	1.05	21.500	4.090	0.070	0.081	-0.044	0.423
4	1.07	20.600	7.350	0.074	-0.145	-0.033	0.259
	1.13	13.500	3.250	0.066	0.104	-0.056	0.50
5	4.162	36.200	35.400	0.033	-2.110	0.117	0.0262
	3.73	72.200	25.100	0.037	-1.540	-0.142	0.208
6	7.235	133.000	22.900	0.019	-1.050	0.131	0.004
	1.220	35.100	11.900	0.040	-0.550	-3.061	0.259
7	2.200	20.200	19.200	0.041	-1.110	0.033	0.054
	1.050	35.000	3.6100	0.039	0.147	-0.090	0.342
8	1.04	12.900	8.860	0.041	-0.176	0.004	0.117
	0.433	16.000	4.310	0.038	0.0737	-0.033	0.342
9	1.770	30.800	9.840	0.022	-0.378	0.0372	0.034
	1.843	34.500	10.200	0.022	0.165	0.051	0.174
10	1.820	44.300	12.000	0.014	-0.031	-0.042	0.021
	1.90	58.900	0.014	0.014	-0.318	-0.030	0.156
11	0.620	14.480	4.200	0.017	-0.042	0.011	0.078
	0.638	14.900	4.280	0.016	0.010	-0.010	0.174.
12	2.210	21.000	20.100	0.044	-0.930	0.031	0.058
	1.32	35.100	11.900	0.040	-0.550	-0.068	0.258

[Оглавление](#)

Таблица коэффициентов продольного движения (тангаж)  $c_i$ 

№	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$
1	0.817	-1.000	8.800	1.16	0.303	7.230
	0.233	29.500	4.230	0.300	0.075	7.480
2	1.200	118.600	27.550	2.320	0.445	7.280
	0.208	-0.710	3.720	0.411	0.110	7.480
3	0.288	2.120	2.400	0.268	0.077	2.820
	0.233	-2.070	3.390	0.215	0.076	3.900
4	0.327	3.070	3.48	0.524	0.112	2.820
	0.166	-2.100	1.330	0.215	0.064	3.900
5	0.405	-1.700	9.330	0.620	0.112	5.720
	-0.661	76.000	13.40	1.280	0.076	8.330
6	0.587	45.800	13.600	1.210	0.204	5.721
	0.456	-2.600	9.240	0.654	0.296	3.330
7	0.319	2.530	2.600	0.327	0.100	2.520
	0.620	-0.420	2.050	0.146	0.050	6.200
8	0.080	12.960	14.500	2.015	0.043	12.800
	1.520	-0.580	4.030	0.432	0.343	3.630
9	0.045	7.937	2.973	0.832	0.000	11.800
	0.957	-0.843	4.210	0.892	0.012	1.870
10	6.330	16.543	12.317	0.973	0.453	5.073
	2.800	-0.217	4.893	0.431	0.052	10.331
11	0.494	2.380	2.674	0.646	0.015	1.870
	0.067	-0.944	1.322	0.173	0.138	9.930
12	0.603	-2.032	4.093	0.892	0.144	1.780
	0.054	8.009	3.973	0.403	0.023	9.890

[Оглавление](#)

## 5. ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ

1. Работа выполняется на компьютере, в одном из математических пакетов, поддерживающем символьные вычисления и формирование отчетной документации.
2. В процессе выполнения практикума, рабочий документ необходимо регулярно сохранять, во избежание потерь в связи с возможными сбоями в работе программного пакета или компьютера. Если работа проводится в несколько этапов, то рабочий документ необходимо сохранять на собственном носителе информации.
3. Отчет по работе оформляется в электронном виде, по пунктам практикума. Первоначально предоставляются исходные данные конкретного варианта задания. Следом за ним преобразования, оценка, расчеты и построения графиков, необходимо прокомментировать в отчете.

## 6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Линеаризация одного из уравнений движения летательного аппарата, в соответствии с вариантом, в вариациях относительно опорного режима полета с разложением соответствующих функций в ряды.
2. Проведение анализа устойчивости модели движения летательного аппарата и возможности ручного пилотирования для одного режима, отдельно для продольного движения и для бокового движения: возможность разделения движений, расчет корней характеристических уравнений, их оценка.
3. Графическое представление возмущенного движения летательного аппарата для этих же режимов бокового и продольного движения - построение переходного процесса по соответствующим параметрам движения как реакцию на случайное воздействие.

## 7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

При защите "Лабораторного практикума" необходимо знать определения и описания следующих понятий:

1. Силы и моменты, действующие на летательный аппарат (ЛА) в полете.
2. Описание допущений и упрощений, применимых при линеаризации уравнений движения летательного аппарата.
3. Критерии устойчивости движения самолета как системы регулирования.
4. Коэффициент (запас) устойчивости в продольном и боковом движения летательного аппарата.
5. Собственная частота колебаний летательного аппарата по параметру движения системы в продольном и боковом движения.

## 8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Микеладзе В. Г., Титов В. М. Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет: Справочник. 2-е изд., доп. - М.: Машиностроение, 1990. 144с.
2. Михалев И.А., Окоемов Б.Н., Чикулаев М.С. Системы автоматического управления самолётом. - М.: Мир, 1974, 207с.
3. Аэромеханика самолета. Под ред. Бочкарева А.Ф. - М.: Высшая школа, 1979, 125с.
4. Окоёмов Б. Н., Зеленов Ю. С., Малахов А. А. Алгоритмизация методов проектирования структур автопилотов. Учебное пособие. - М.: МВТУ, 1991, 84с.
5. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. Учебное пособие для вузов. - М.: Машиностроение, 1985, 536с.